SOS. 25/5/18

ΑΣΚΗΣΗ 1: $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = xy + yz + xz$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$: ο πίνακας της q στη συνήθη ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -t & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -t \end{vmatrix} = \dots = -\left(t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}\right) = -(t-1)\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)^2$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1/2$ (διπλή)

Τότε στους κύριους άξονες:

$$q(x', y', z') = (x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(z')^2$$

Είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / q(x,y,z) = \frac{1}{2}\}$$

Στους κύριους άξονες $S = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / (x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(z')^2 = \frac{1}{2}\} =$

$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = 1\}$: δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{(y')^2}{1^2} - \frac{(z')^2}{1^2} = 1$$

→

• $V(1): \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ το $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(1)$

• $V(1/2): \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x-y \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} =$

$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: βάση του $V(-1/2)$

Με διαδικασία Gram-Schmidt βλέπουμε ότι τα διανύσματα:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$: ορθογώνια βάση του $V(-1/2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(-1$

Κύριοι Άξονες: $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Επειδή υπάρχει αρνητική ιδιοτιμή του $A \Rightarrow$ ο A δεν είναι θετικός ή μη-αρνητικός $\Rightarrow$ δεν υπάρχει η $\sqrt{A}$

Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$:

: ορθογώνιος πίνακας έτσι ώστε:

$^tP \cdot AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} {}^tP$. Τότε μια κυβική ρίζα του A είναι

$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt[3]{2} \end{pmatrix} {}^tP = \ldots$ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2: $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$q(x,y,z) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 12z + 16$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 = 0\}$: Είδος Επιφάνειας

$q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2$

$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$: ο πίνακας της q στη ~~~~ συνήθη ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$

$P_A(t) = |A - tI_3| = \dots = -(t-10)(t-5)(t-3)$

$\Rightarrow$ Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$

Στους κύριους άξονες:
$q(x', y', z') = 10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2$

• $V(10) = \left\{ k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: βάση του $V(10)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{ΟΚΒ του } V(10)}$

- $V(5) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: βάση του $V(5)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{ΟΚΒ του } V(5)}$

- $V(3) = \left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{ΟΚΒ του } V(3)}$

Κύριοι Άξονες της φ: $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to P = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: είναι ορθογώνιος πίνακας.

$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} : {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

ο A είναι θετικός

$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} {}^tP \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{A} = P \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} {}^tP$

Τότε: αν $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ είναι η στήλη συντεταγμένων ενός διανύσματος $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ τότε:

$\to$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ z = z' \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 2(-2x'+y') + 4(x'+2y') + 12z' + 16 = 0 \Rightarrow$$

Με συμπλήρωση τετραγώνων

$$\Rightarrow 10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 10y' + 12z' + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 10(x')^2 + 5[(y'+1)^2 - 1] + 3[(z'+2)^2 - 4] + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 10(x')^2 + 5(y'+1)^2 + 3(z'+2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(x')^2 + 5(y'+1)^2 + 3(z'+2)^2 = 1$$

Θέτουμε: $X = x'$, $Y = y'+1$, $Z = z'+2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 10X^2 + 5Y^2 + 3Z^2 = 1$$: <u>ελλειψοειδές</u>

25/5/18

Συνέχεια...

ΑΣΚΗΣΗ 3: Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας θετικός ορθογώνιος πίνακας. Να βρεθεί ο A.

ΛΥΣΗ: • A: ορθογώνιος $\Rightarrow$ αν λ: ιδιοτιμή του A, τότε: $\lambda = \pm 1$

• A: θετικός $\Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο $\mathbb{R}$ και είναι θετικοί αριθμοί

$\Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με 1

• A: συμμετρικός $\xrightarrow[\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}]{\text{ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ}}$ $\exists$ ορθογώνιος πίνακας P: ${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P I_n {}^tP = P\,{}^tP = I_n$

$\boxed{A = I_n}$

ΑΣΚΗΣΗ 4: Έστω $f, g: E \to E$ ενδομορφισμοί του Ευκλείδειου χώρου E, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$ και έστω $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε: $(kf + \lambda g)^* = k \cdot f^* + \lambda g^*$ και $(f^*)^* = f$

ΛΥΣΗ: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$: $\boxed{\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle}$ (*)

(Αν B: ΟΚΒ του E, τότε: $M_B^B(f^*) = {}^tM_B^B(f)$)

$\langle (kf + \lambda g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle k f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x}), \vec{y} \rangle =$
$= \langle k \cdot f(\vec{x}), \vec{y} \rangle + \langle \lambda g(\vec{x}), \vec{y} \rangle = k \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle + \lambda \langle g(\vec{x}), \vec{y} \rangle$
$\overset{(*)}{=} k \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle + \lambda \langle \vec{x}, g^*(\vec{y}) \rangle =$
$= \langle \vec{x}, k f^*(\vec{y}) \rangle + \langle \vec{x}, \lambda g^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, k f^*(\vec{y}) + \lambda g^*(\vec{y}) \rangle =$

$\to$

$$= \langle \vec{x}, (kf^* + \lambda g^*)\vec{y} \rangle \quad (1)$$

$$\langle (kf + \lambda g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \vec{x}, (kf + \lambda g)^*(\vec{y}) \rangle \quad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow \langle \vec{x}, (kf^* + \lambda g^*)(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, (kf + \lambda g)^*(\vec{y}) \rangle$
$\forall \vec{x} \in E \Rightarrow (kf^* + \lambda g^*)(\vec{y}) = (kf + \lambda g)^*(\vec{y}), \forall \vec{y} \in E$:
$\Rightarrow (kf + \lambda g)^* = kf^* + \lambda g^*$

$(*) \Rightarrow \langle f^*(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, (f^*)^*(\vec{y}) \rangle$

$= \langle f^*(\vec{y}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, f^*(\vec{x}) \rangle \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \vec{y}, f^*(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, f^{**}(\vec{y}) \rangle$$

$$\langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle \qquad \forall \vec{x} \in E$$

$$\Rightarrow f(\vec{y}) = f^{**}(\vec{y}), \forall \vec{y} \in E \Rightarrow f^{**} = f$$

- $\boxed{(f \circ g)^* = g^* \circ f^*}$

$$\langle (f \circ g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \vec{x}, (f \circ g)^*(\vec{y}) \rangle$$

$$\langle f(g(\vec{x})), \vec{y} \rangle = \langle g(\vec{x}), f^*(\vec{y}) \rangle \overset{(*)}{=}$$

$$= \langle \vec{x}, g^*(f^*(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, (g^* \circ f^*)(\vec{y}) \rangle$$

$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = (f \circ g)^*(\vec{y}) = (g^* \circ f^*)(\vec{y}), \forall \vec{y} \in E$
$\forall \vec{x} \in E$

ΑΣΚΗΣΗ 5: Έστω $f: E \to E$ ενδομορφισμός, όπου: $(E, \langle , \rangle)$ είναι Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.
1. f: ισομετρία $\overset{(+)}{\Leftrightarrow}$ $f^* \circ f = Id_E$ $\overset{(\ddagger)}{\Leftrightarrow}$ f: ισομορφισμός και $f^{-1} = f^*$
2. Δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγονται την τρίτη:
(a) $f = f^*$, (b) f: ισομετρία, (γ) $f^2 = Id_E$

ΛΥΣΗ: 1. $(\ddagger)$: "$\Rightarrow$" Έστω ότι $f^* \circ f = Id_E$.
Έστω $\vec{x} \in \ker(f) \Rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f^*(f(\vec{x})) = f^*(\vec{0}) = \vec{0}$
$\Rightarrow (f^* \circ f)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow Id_E(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
Άρα $\ker(f) = \{\vec{0}\} \Rightarrow f$: μονομορφισμός $\left. \begin{matrix} \\ \dim_{\mathbb{R}} E < \infty \end{matrix} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow f$: ισομορφισμός $\Rightarrow$ υπάρχει ο f^{-1} και τότε:
$(f^* \circ f) \circ f^{-1} = Id_E \circ f^{-1} \Rightarrow f^* \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow f^* \circ Id_E = f^{-1} \Rightarrow f^* = f^{-1}$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι ο f: ισομορφισμός και $f^{-1} = f^* \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1} \circ f = f^* \circ f \Rightarrow Id_E = f^* \circ f$

$(+)$: "$\Rightarrow$" Έστω ότι η f: ισομετρία $\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$:
$: \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Leftrightarrow \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
$\Leftrightarrow \langle \vec{x}, (f^* \circ f)(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \forall \vec{x} \in E$
$\Leftrightarrow (f^* \circ f)(\vec{y}) = \vec{y}, \forall \vec{y} \in E \Leftrightarrow f^* \circ f = Id_E$

2. (a),(b) $\Rightarrow$ (γ) $\left. \begin{matrix} \text{(a)}: f = f^* \\ \text{(b)}, (1): f^* \circ f = Id_E \end{matrix} \right| \Rightarrow f \circ f = f^2 = Id_E$

(b),(γ) $\Rightarrow$ (a) $\left. \begin{matrix} \text{(b)} (1): f^{-1} = f^* \\ \text{(γ)} : f^2 = Id_E \Rightarrow f^{-1} = f \end{matrix} \right| \Rightarrow f = f^*$

$\Rightarrow$

(α), (γ) $\Rightarrow$ (β)   (α): $f = f^*$; (γ): $f^2 = Id_E$ $\Rightarrow$ $f \circ f = Id_E$ $\Rightarrow$ $f \circ f = Id_E$ $\Rightarrow$ (β)

f: ισομετρία

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ θεωρούμε τις εξής συνθήκες:

(α) A: συμμετρικός, (β): A: ορθογώνιος, (γ): $A^2 = I_n$

Τότε: (α), (β) $\Rightarrow$ (γ), (α) (γ) $\Rightarrow$ (β), (β), (γ) $\Rightarrow$ α

Θεωρούμε τον ενδομορφισμό $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_A(X) = A \cdot X$

f_A: αυτοπροσαρτημένος: $f_A = f^*_A \Leftrightarrow A$: συμμετρικός

f_A: ισομετρία $\Leftrightarrow$ A: ορθογώνιος

$f_A^2 = Id_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow A^2 = I_n$

ΑΣΚΗΣΗ (6): Έστω ο ενδομορφισμός $f: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = {}^tA$

Είναι ο f: ισομετρία? Είναι ο f: αυτοπροσαρτημένος?

ΛΥΣΗ: Ο $M_n(\mathbb{R})$ είναι Ευκλείδειος χώρος με εσωτερικό γινόμενο: $\langle A, B \rangle = Tr(A \cdot {}^tB)$

$\langle f(A), f(B) \rangle = \langle {}^tA, {}^tB \rangle = Tr({}^tA \cdot {}^t({}^tB)) =$
$= Tr({}^tA \cdot B)$

$\langle A, B \rangle = Tr(A \cdot {}^tB) = Tr({}^t(A \cdot {}^tB)) =$
$= Tr({}^t({}^tB) \cdot {}^tA) = Tr(B \cdot {}^tA)$!

$(\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) : Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A))$

! $Tr({}^tA \cdot B) = Tr(B \cdot {}^tA) \Rightarrow \langle f(A), f(B) \rangle = \langle A, B \rangle$

Άρα ο f: ισομετρία

$f^2(A) = f(f(A)) = {}^t({}^tA) = A \Rightarrow f^2 = Id_{M(\mathbb{R})}$ $\Bigg| \Rightarrow$

ΑΣΚΗΣΗ

5 $\Rightarrow f = f^*$ Συν. f: αυτοπροσαρτημένος